# خلاصه درس

## فصل اول: آشنایی با نظریهٔ اعداد

### درس ۱: استدلال ریاضی

مهم‌ترین موضوع در ریاضیات اثبات درستی یک مطلب است. در این درس می‌خواهیم انواع استدلال در ریاضی را مورد بررسی و مطالعه قرار دهیم. فقط توجه کنید که در ریاضیات، درستی یک مطلب با بررسی چند مثال اثبات نمی‌شود.

**مثال نقض:** مثالی است که نشان می‌دهد یک حکم و نتیجه‌گیری کلی نادرست است.

**تمرین: آیا برای هر دو عدد حقیقی $a$ و $b$ رابطهٔ $|a+b|=|a|+|b|$ برقرار است؟**

**پاسخ** خیر، زیرا برای $a=4$ و $b=-6$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}|a+b|=|4+(-6)|=|-2|=2\\ |a|+|b|=|4|+|-6|=4+6=10\end{array}\right\}\Rightarrow 2\neq 10\Rightarrow |a+b|\neq|a|+|b|$$

**اثبات مستقیم:** اثبات درستی یک مطلب براساس تعاریف، اصول و قضایایی که از قبل درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، اثبات مستقیم نام دارد.

**تمرین: ثابت کنید حاصل جمع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.**

**پاسخ** می‌دانید فرم کلی اعداد فرد به‌صورت $2k+1$ $(k\in\mathbb{Z})$ است، پس برای دو عدد فرد $a=2k+1$ و $b=2k'+1$ داریم:

$$a+b=2k+1+2k'+1=2k+2k'+2=2(k+k'+1)$$

چون $k$ و $k'$ اعداد صحیحی هستند، پس $k+k'+1$ نیز عدد صحیحی مانند $k''$ است: $k+k'+1=k''\Rightarrow a+b=2k''$

بنابراین $a+b$ عددی زوج است.

### ■ اثبات با در نظرگرفتن تمام حالات

بعضی مواقع برای اثبات درستی یک مطلب، باید تمام حالات ممکن در مسئله را در نظر گرفته و در هر حالت درستی آن مطلب را اثبات نماییم.

**تمرین: برای هر عدد صحیح $n$، ثابت کنید $n^2+5n+6$ عددی زوج است.**

**پاسخ** برحسب این‌که $n$ زوج یا فرد باشد دو حالت زیر را داریم:

حالت ۱) $n=2k+1\Rightarrow n^2+5n+6=(2k+1)^2+5(2k+1)+6$

$$=4k^2+4k+1+10k+5+6=4k^2+14k+12=2(\underbrace{2k^2+7k+6}_{q})=2q$$

حالت ۲) $n=2k\Rightarrow n^2+5n+6=(2k)^2+5(2k)+6$

$$=4k^2+10k+6=2(\underbrace{2k^2+5k+3}_{q'})=2q'$$

بنابراین $n^2+5n+6$ همواره عددی زوج است.

### ■ اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

در این روش مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد که به این فرض، فرض خلف می‌گویند.

۲) با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و یک سری از استدلال‌های درست، به نتیجه یا نتایجی غیرممکن و یا متضاد با فرض مسئله می‌رسیم.

۳) با توجه به تناقض ایجادشده معلوم می‌شود که فرض خلف نادرست است، بنابراین حکم باید برقرار باشد.

**تمرین: اگر $n\in\mathbb{Z}$ و $n^2$ عددی فرد باشد، آن‌گاه ثابت کنید $n$ نیز فرد است.**

**پاسخ** فرض می‌کنیم $n$ فرد نباشد، پس $n$ عددی زوج است (فرض خلف):

$$n=2k,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow n^2=4k^2=2(\underbrace{2k^2}_{q})=2q$$

پس $n^2$ زوج است و این نتیجه خلاف فرض مسئله است زیرا $n^2$ عددی فرد است، پس باید $n$ عددی فرد باشد.

**تمرین: اگر $\sqrt{3}$ عددی گنگ باشد. آن‌گاه ثابت کنید $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ عددی گنگ است.**

**پاسخ** فرض می‌کنیم $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ عددی گویا مانند $q$ باشد (فرض خلف) پس:

$$q=2\sqrt{2}-\sqrt{3}\Rightarrow q+\sqrt{3}=2\sqrt{2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}(q+\sqrt{3})^2=(2\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow q^2+2q\sqrt{3}+3=8\Rightarrow 2q\sqrt{3}=5-q^2\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{5-q^2}{2q}$$

چون $q$ عددی گویا و مخالف صفر است، پس $\frac{5-q^2}{2q}$ نیز عددی گویا است. بنابراین $\sqrt{3}$ نیز عددی گویا است و این نتیجه خلاف فرض مسئله است زیرا $\sqrt{3}$ عددی گنگ است، پس باید $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ عددی گنگ باشد.

### ■ اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز)

می‌دانیم اگر $p$ و $q$ دو گزارهٔ هم‌ارزش باشند، آن‌گاه گزارهٔ دو شرطی $p\Leftrightarrow q$ درست است و برعکس. بنابراین برای اثبات درستی $p$ اگر گزاره‌های دو شرطی $p\Leftrightarrow r_1, r_1\Leftrightarrow r_2, \dots, r_n\Leftrightarrow q$ درست باشند، آن‌گاه از درستی $q$ می‌توان درستی $p$ را نتیجه گرفت. این مطلب اساس اثبات بازگشتی است. یعنی برای اثبات درستی یک حکم، توسط روابط برگشت‌پذیر آن را به یک رابطهٔ درست و بدیهی می‌رسانیم.

**تمرین: اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی مخالف صفر و مختلف‌العلامت باشند، درستی رابطهٔ مقابل را ثابت کنید.** $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leq -2$

**پاسخ** چون $x$ و $y$ مختلف‌العلامت هستند، پس $y.x$ عددی منفی است و داریم:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leq -2\xleftrightarrow[xy<0]{\times(xy)}xy\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq -2xy\Leftrightarrow x^2+y^2\geq -2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2\geq 0\Leftrightarrow (x+y)^2\geq 0$$ همواره برقرار است.

**تمرین: برای اعداد حقیقی $x$، $y$ و $z$ رابطهٔ زیر را ثابت کنید.**

$x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz$

**پاسخ**

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz\xleftrightarrow{\times 2}2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2xz+2yz$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+x^2-2xz+z^2+y^2-2yz+z^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0$$ همواره برقرار است.

### درس ۲: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

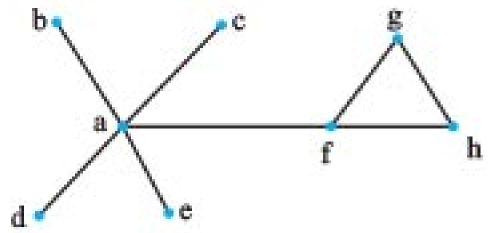
**تعریف:** برای اعداد صحیح $a$ و $b$ که $a\neq 0$، اگر عدد صحیحی مانند $q$ وجود داشته باشد به‌طوری که $b=a.q$ در این‌صورت می‌گوییم عدد $b$ بر عدد $a$ بخش‌پذیر است و می‌نویسیم: $a\mid b$

$$\boxed{b=aq\Leftrightarrow a\mid b}$$

**تعریـف،** در بین تمام مجموعه‌هـای احاطه‌گر گراف $G$، بـه مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند، احاطه‌گر مینیمم می‌گوییـم. تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عـدد احاطه‌گری گراف $G$ می‌گوییم و آن را با نماد $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم.

**تذکر** یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمـم گراف $G$ را یک $\gamma$ مجموعهٔ گراف $G$ می‌گویند.

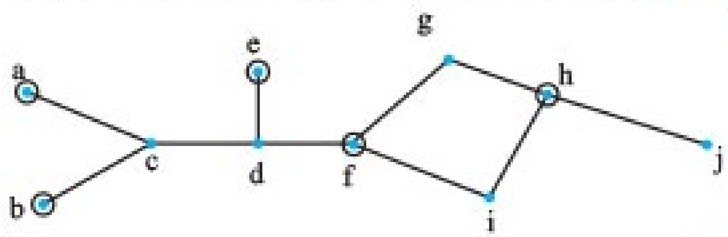
به عنوان مثال گراف زیر با کمتر از دو رأس احاطه نمی‌شود، پس داریم:




$\gamma=2$, $\{a,g\}$ یا $\{a,h\}$ یا $\{a,f\}$ : $\gamma-$ مجموعه

**مجموعـهٔ احاطه‌گر مینیمال،** یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر کدام از رئوس آن، مجموعهٔ رئوس باقی‌مانده دیگر احاطه‌گر نباشد، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال می‌گویند.

**تمرین: برای گراف زیر یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال بنویسید.**




**پاسخ** مجموعهٔ $\{a,b,e,f,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است زیرا: با حذف $a$، خود رأس $a$ احاطه نمی‌شـود، با حذف $b$، خود رأس $b$ احاطه نمی‌شود، با حذف $e$، خود رأس $e$ احاطه نمی‌شود، با حذف $f$، خود رأس $f$ احاطه نمی‌شود و با حذف $h$، رئوس $h$ و $j$ احاطه نمی‌شوند.

**نکته ۱:** هر مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال را می‌توان با حذف برخی رئوس آن به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد.

**نکته ۲:** هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یـک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است ولی عکس آن الزاماً صحیح نیست. یعنی ممکن است یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال باشد ولی مینیمم نباشد.

**تعریف،** اگر $x$ عددی حقیقی باشد، برای نمایش عدد صحیح بعد از آن از نماد $\lceil x \rceil$ استفاده می‌کنیم و آن را سقف $x$ می‌نامیم. در حالت کلی داریم:

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ x \text{ کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از } & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

**مثال**

$\lceil ۳/۲ \rceil = ۴, \lceil ۵ \rceil = ۵$

**نکته ۱:** در هـر گراف، هر رأس خودش و تمـام رئوس مجاورش را احاطه می‌کند.

**نکته ۲:** اگر در گرافی ماکزیمم درجه $\Delta$ باشد، هر رأس در بیشترین حالت می‌تواند $\Delta+1$ رأس را احاطه کند.

**نتیجه** اگر $G$ یک گراف $n$ رأسـی با ماکزیمم درجهٔ $\Delta$ باشد و $D$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشـد. آن‌گاه $|D| \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ و از آن‌جا که $\gamma(G)$ نیز اندازهٔ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس داریم: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$.

اصطلاحاً گفته می‌شـود در گراف $G$ عـدد $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ یک کران پایین برای عدد احاطه‌گری یعنی $\gamma(G)$ است. یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر باشد.

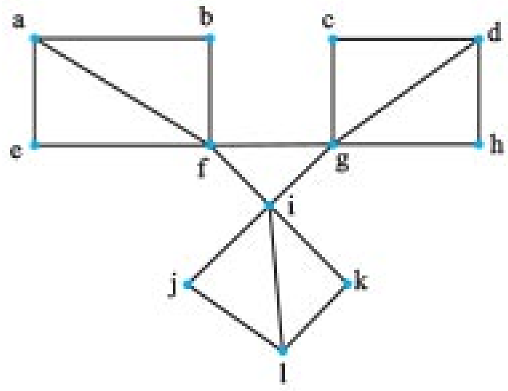
**نکته ۱:** در بعضی گراف‌ها عدد احاطه‌گری با $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ برابر است و در بعضی گراف‌ها برابر نیست.

**نکته ۲:** در گراف‌هـای $P_n$ و $C_n$ عدد احاطه‌گـری با مقدار $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ برابر است و چون در این گراف‌ها $\Delta=۲$ است، داریم: $\gamma = \left\lceil \frac{n}{۲+۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$

به عنوان مثال عدد احاطه‌گری $P_{۱۳}$ برابر با $\left\lceil \frac{۱۳}{۳} \right\rceil = ۵$ است.

**نکته ۳:** اگر برای گراف $G$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر $m$ عضوی وجود داشته باشد، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که: $\gamma(G) \leq m$

**تمرین: عدد احاطه‌گری گراف زیر را بیابید.**




(G)

**پاسخ**

$n=۱۲, \Delta=۵ \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۲}{۵+۱} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq ۲ \ (۱)$

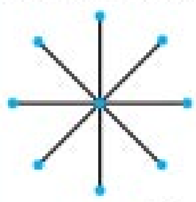
از بیـن رئوس $a$، $b$، $f$ و $e$ حداقل یـک رأس، از بین رئوس $c$، $d$، $h$ و $g$ حداقـل یک رأس و از بین رئـوس $i$، $k$، $\ell$ و $j$ نیز حداقل یک رأس برای احاطه‌کردن کل گراف باید انتخاب کنیم، پس: $\gamma(G) \geq ۳ \ (۱)$

$\{f,d,\ell\} = $ مجموعهٔ احاطه‌گر $\Rightarrow \gamma(G) \leq ۳ \xrightarrow{(۱)} \gamma(G) = ۳$

**نکته:** در گرافـی با $\gamma=۱$ کمترین تعداد یال‌ها زمانی اتفاق می‌افتد که یک رأس به تمام رئوس دیگر متصل شـده باشـد. و بیشترین تعداد یال‌ها زمانی اتفاق می افتد که گراف به‌صورت گراف کامل باشد.

**تمرین: در گرافـی از مرتبه ۹ و $\gamma=۱$، کمترین و بیشـترین تعداد یال‌ها را بیابید.**

**پاسخ** برای داشتن کمترین تعداد یال‌ها باید گراف را به‌صورت زیر در نظر بگیریم:



$\Rightarrow q_{min} = ۸$

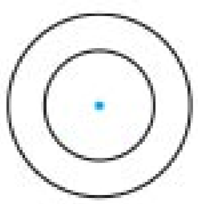
بیشترین تعداد یال‌ها زمانی اتفاق می‌افتد که گراف کامل باشد. پس:

$K_۹ \Rightarrow q_{max} = \binom{۹}{۲} = \frac{۹\times۸}{۲} = ۳۶$

**تمرین: الف) یک گراف ۹ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.**

**ب) یک گراف ۹ رأسـی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.**

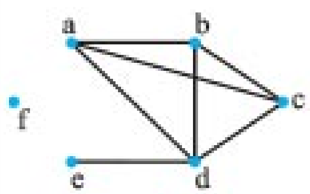
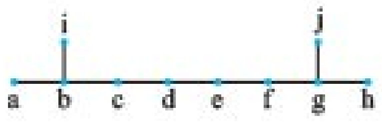
| امتحان ۲ | سؤالات شبیه‌ساز امتحانی نوبت اول | | | مهروماه |
|---|---|---|---|---|
| | درس: ریاضیات گسسته | رشته: ریاضی فیزیک | مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه | تاریخ: |

| ردیف | سؤالات | نمره |
|---|---|---|
| | **فصل اول** | |
| ۱ | **جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.**<br>**الف) اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵ برابر ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^4$ بر ۵ برابر ...... است.**<br>**ب) باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۲۷۵۶۷۸ بر ۱۱ برابر ...... است.** | ۰/۵ |
| ۲ | **اگر $n\in\mathbb{N}$ ،$n^3$ عددی فرد باشد، آن‌گاه ثابت کنید n نیز عددی فرد است.** | ۱ |
| ۳ | **اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b\|a+4$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $2a^2-b^2+30$ بر ۸ را بیابید.** پرتکرار | ۱/۵ |
| ۴ | **برای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y نامساوی زیر را به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید.** پرتکرار<br>$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ | ۱/۲۵ |
| ۵ | **اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha-\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha+2\beta$ گنگ است.** | ۱ |
| ۶ | **اگر $n\in\mathbb{Z}$ و $n\|3k+7$ و $n\|5k+10$، آن‌گاه n را بیابید.** پرتکرار | ۱/۵ |
| ۷ | **بزرگ‌ترین عدد طبیعی را بیابید که در تقسیم بر عدد ۷۵، باقی‌ماندهٔ تقسیم از چهار برابر مربع خارج قسمت یک واحد بیشتر باشد؟** | ۱/۲۵ |
| ۸ | **اگر $a\|b$ و $c\|d$، آن‌گاه ثابت کنید $a.c\|b.d$.** | ۱ |
| ۹ | **اگر دو عدد $3a-1$ و $4a+3$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $9a-6$ را بیابید.** | ۱ |
| ۱۰ | **اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.** | ۱/۵ |
| ۱۱ | **تیراندازی به سمت یک هدف شامل دو دایرهٔ هم‌مرکز تیراندازی می‌کند. اگر به دایرهٔ کوچک‌تر بزند، ۷ امتیاز و اگر به دایرهٔ بزرگ‌تر بزند، ۴ امتیاز می‌گیرد. اگر تمام تیرهای او به هدف برخورد کند، به چند طریق می‌تواند امتیاز ۵۹ را کسب کرده باشد.**<br> | ۱/۵ |
| ۱۲ | **ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.** | ۱ |
| ۱۳ | **حاصل $(4m+1\,,\,4m+3)$ را بیابید.** | ۱ |
| | **فصل دوم** | |
| ۱۴ | **جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.**<br>**الف) مجموع درجات رئوس گراف کامل از مرتبهٔ ۴ برابر ...... است.**<br>**ب) در گراف تهی مجموعهٔ همسایگی باز هر رأس ...... است.** | ۰/۵ |
| ۱۵ | **یک گراف ۴ رأسی غیرتهی k- منتظم رسم کنید که:**<br>**الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.**<br>**ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.** | ۱ |

مهروماه

**سؤالات امتحانی دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور نوبت دوم**

| درس: ریاضیات گسسته | رشته: ریاضی فیزیک | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه | تاریخ امتحان: دی ۱۴۰۰ |
|---|---|---|---|

| ردیف | سؤالات | نمره |
|---|---|---|
| ۱ | **عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید.**<br>**الف) حاصل ضرب هر عدد گویا ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گنگ،گویا) است.** پرتکرار<br>**ب) اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشم $a\|b$، برای هر $m\in\mathbb{Z}$ داریم: $(a\|mb, ma\|b)$.**<br>**پ) اگر $a\|b$ آن‌گاه ب.م.م دو عدد a و b برابر با $(a,\|a\|)$ است.** پرتکرار<br>**ت) اگر $ac\overset{m}{\equiv}bc$ و $(c,m)=d$ آن‌گاه رابطهٔ $(a\overset{m}{\equiv}b, a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b)$ برقرار خواهد بود.** | ۱ |
| ۲ | **اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است.** پرتکرار | ۱/۵ |
| ۳ | **ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، برابر یک است.** پرتکرار | ۱/۵ |
| ۴ | **اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.** | ۱/۲۵ |
| ۵ | **معادلهٔ سیالهٔ $۶x+۷y=۱۸۵$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.** پرتکرار | ۱/۷۵ |
| ۶ | **با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید.** پرتکرار<br>**الف) مقدار $q-\Delta(G)$ را بیابید.**<br>**ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.**<br>**پ) با ذکر دلیل مشخص کنید گراف مکمل G چند یال دارد؟**<br> | ۲ |
| ۷ | **درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.**<br>**الف) هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.** پرتکرار<br>**ب) اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ $\Delta$ باشد، آن‌گاه $\gamma(G)>\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil$.**<br>**پ) در گراف $P_n$ عدداحاطه‌گری برابر با $\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil$ است.** پرتکرار<br>**ت) $\lceil ۳/۴۸\rceil=۴$** پرتکرار | ۱ |
| ۸ | **عدد احاطه‌گری گراف G (شکل مقابل) را با ارائه راه حل تعیین کنید.** پرتکرار<br> | ۱/۵ |
| ۹ | **گراف $C_9$ را رسم کنید.** پرتکرار<br>**الف) یک $\gamma-$ مجموعه از آن را مشخص کنید.** **ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی از آن را تعیین نمایید.** | ۱/۵ |
| ۱۰ | **می‌خواهیم با حروف «ش»، «الف» و «ث» و ۵ عدد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ یک رمز شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است تعداد کل رمزهایی که در هر یک از آن‌ها حروف کنار هم باشند.** پرتکرار | ۰/۵ |
| ۱۱ | **با حروف کلمه جیرجیرک چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت؟** پرتکرار | ۱ |
| ۱۲ | **به چند طریق می‌توان از بین ۶ نوع گل متفاوت، ۱۰ شاخه گل انتخاب کرد به‌طوری که از گل نوع سوم حداقل ۴ شاخه و از نوع ششم بیش از ۲ شاخه انتخاب کنیم؟** پرتکرار | ۱/۷۵ |
| ۱۳ | **در مربع لاتین A (شکل مقابل) جای سطر اول و سوم را با هم جابه‌جا کنید تا مربع لاتین B ایجاد شود. سپس با ذکر دلیل بررسی کنید آیا A و B دو مربع لاتین متعامد هستند؟** پرتکرار<br>$A=\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline\end{array}$ | ۱/۲۵ |
| ۱۴ | **از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰، $(۱\le n\le ۳۰۰)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر است ولی بر ۵ بخش‌پذیر نیست؟** پرتکرار | ۱/۵ |
| ۱۵ | **ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است؟** | ۱ |
| | **جمع نمره** | ۲۰ |

طبق اصل لانهٔ کبوتری، حداقل یک مربع شامل دست کم ۲ نقطه وجود دارد. حال برای ۲ نقطه داخل یک مربع داریم: (۰/۲۵)

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow BC = \sqrt{8}$ (۰/۲۵)

فاصلهٔ ۲ نقطه داخل یک مربع $< BC = \sqrt{8}$ (۰/۲۵)

(فصل ۳ / اصل لانهٔ کبوتری)

## امتحان ۷ - خرداد ماه ۱۳۹۹ (نوبت دوم)

**۱** الف) نادرست (فصل ۱/ مثال نقض) (۰/۲۵) مثال نقض زیر را در نظر بگیرید.

$a = 2+\sqrt{3}\ , b = 4-\sqrt{3} \Rightarrow a+b = 2+\sqrt{3}+4-\sqrt{3} = 6 \in Q$ (۰/۵)

ب) درست (فصل ۱ / اثبات مستقیم) (۰/۲۵)

$a = 2k+1 \Rightarrow a^2-1 = (2k+1)^2-1$ (۰/۲۵) $= 4k^2+4k+1-1 = 4k^2+4k$

$\Rightarrow a^2-1 = 4k(k+1)$ (۰/۲۵)

ضرب دو عدد صحیح متوالی، مضرب ۲ است، پس:

$k(k+1) = 2q \Rightarrow a^2-1 = 4\times 2q = 8q$ (۰/۲۵)

**۲** طبق رابطهٔ تقسیم داریم:

$a = 4q+3$ (۰/۲۵) $\to 2a+3 = 2(4q+3)+3 = 8q+6+3 = 8q+9$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow 2a+3 = 8q+8+1 = 8\underbrace{(q+1)}_{q'}+1$ (۰/۲۵) $= 8q'+1$ (۰/۲۵)

پس باقی‌مانده برابر $r=1$ است. (۰/۲۵) (فصل ۱ / قضیهٔ تقسیم)

**۳**

$\left.\begin{matrix} n|9k+7 \\ n|7k+6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow n|7(9k+7)-9(7k+6)$ (۰/۵)

$\Rightarrow n|63k+49-63k-54 \Rightarrow n|-5$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=1$ یا $n=5$ (۰/۲۵)

(فصل ۱ / بخش‌پذیری)

**۴**

$7^2 \overset{15}{\equiv} 49 \Rightarrow 7^2 \overset{15}{\equiv} 49-3\times 15$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 7^2 \overset{15}{\equiv} 4$ (۰/۲۵)

$(7^2)^2 \overset{15}{\equiv} 4^2 \Rightarrow 7^4 \overset{15}{\equiv} 16$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 7^4 \overset{15}{\equiv} 16-15 \overset{15}{\equiv} 1$ (۰/۲۵)

$(7^4)^7 \overset{15}{\equiv} 1^7 \Rightarrow 7^{28} \overset{15}{\equiv} 1$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{\times 7^2} 7^{30} \overset{15}{\equiv} 7^2 \overset{15}{\equiv} 4$ (۰/۲۵)

باقی مانده برابر ۴ است. (فصل ۱ / باقی‌ماندهٔ اعداد)

**۵**

$5x \overset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 2+3\times 11$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 35$ (۰/۲۵)

$(5,11)=1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow x = 11k+7$ (۰/۵)

(فصل ۱ / معادلهٔ همنهشتی)

**۶** الف) دو برابر (فصل ۲ / مجموع درجات رئوس) (۰/۲۵)

ب) k (فصل ۲ / گراف k منتظم) (۰/۲۵)

پ) مینیمم (فصل ۲ / مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم) (۰/۲۵)

ت) مینیمال (فصل ۲ / مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال) (۰/۲۵)

**۷** الف) $N_G[a] = \{a,b,d,e\}$ (۰/۵)

ب) دور به طول ۴: adeba (۰/۲۵)

پ) مسیر به طول ۳: aebc (۰/۲۵)

مسیر به طول ۴: adebc (۰/۲۵)

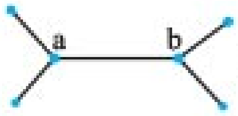
(فصل ۲ / مفاهیم گراف)

**۸** $deg_G(v)+deg_{\bar{G}}(v) = p-1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 9+12 = p-1$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow p = 22$ (۰/۲۵)

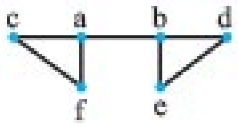
(فصل ۲ / مکمل گراف)

**۹** الف) گراف زیر ۶ رأسی و فقط یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم ۲ عضوی دارد.




مجموعهٔ یکتا $\gamma = \{a,b\}$ (۰/۲۵)

ب) گراف زیر بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم ۲ عضوی دارد.




مجموعه‌ها $\gamma = \{a,d\}$ یا $\{b,f\}$ یا $\{c,e\}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

(فصل ۲ / احاطه‌گری)

**۱۰** در گراف موردنظر داریم:

$n=10, \Delta=3 \Rightarrow \gamma \ge \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \gamma \ge \left\lceil \frac{10}{3+1} \right\rceil \Rightarrow \gamma \ge 3$ (۰/۲۵)

از طرفی مجموعهٔ $\{g,h,d\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف است. (۰/۲۵)

پس داریم:

$\gamma \le 3$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{\gamma\ge 3} \gamma = 3$ (۰/۲۵)

(فصل ۲ / عدد احاطه‌گری)

**۱۱** با توجه به این‌که دو تا رقم ۱ و سه تا رقم ۲ داریم، پس:

$\frac{7!}{2!\times 3!}$ (۰/۵) $= \frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3!}{2\times 1\times 3!} = 420$ (۰/۲۵)

(فصل ۳ / جایگشت‌های باتکرار)

**۱۲** اگر تعداد شاخه‌های گل نوع iام را با $x_i$ نشان دهیم، داریم:

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 11,\ x_2 \ge 2,\ x_5 > 3$ (۰/۲۵)

$x_2 \ge 2 \to x_2-2 \ge 0,\ y_2 = x_2-2 \to x_2 = y_2+2,\ y_2 \ge 0$ (۰/۲۵)

$x_5 > 3 \to x_5 \ge 4 \to x_5-4 \ge 0,\ y_5 = x_5-4 \to x_5 = y_5+4,\ y_5 \ge 0$ (۰/۲۵)

$x_1+y_2+2+x_3+x_4+y_5+4 = 11 \Rightarrow x_1+y_2+x_3+x_4+y_5 = 5$ (۰/۲۵)

$n=5, k=5 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{9}{4}$ (۰/۲۵)

(فصل ۳ / شمارش)

**۱۳** جایگشت مقابل را در نظر می‌گیریم: (۱)

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۴ | ۳ | ۲ | ۱ |
| ۲ | ۱ | ۴ | ۳ |
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |

$\Rightarrow$
$1 \to 3$
$2 \to 4$
$3 \to 1$
$4 \to 2$

(فصل ۳ / مربع لاتین)

**۱۴** الف)

| | | |
|---|---|---|
| ۳۲ | ۲۱ | ۱۳ |
| ۱۱ | ۳۳ | ۲۲ |
| ۲۳ | ۱۲ | ۳۱ |

(۰/۵) متعامدند زیرا عدد تکراری وجود ندارد.

ب)

| | | |
|---|---|---|
| ۱۳ | ۲۱ | ۳۲ |
| ۳۲ | ۱۳ | ۲۱ |
| ۲۱ | ۳۲ | ۱۳ |

(۰/۵) متعامد نیستند، زیرا عدد تکراری در مربع حاصل وجود دارد. (فصل ۳ / مربع‌های لاتین متعامد)

**۱۵** تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعهٔ ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی، پس: (۰/۲۵)

$(8)_4 = \frac{8!}{(8-4)!}$ (۰/۵) $= \frac{8!}{4!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5\times 4!}{4!} = 1680$ (۰/۲۵)

(فصل ۳ / تابع یک‌به‌یک)

**۱۶**

$S = \{1,2,\dots,100\}$

$A =$ مجموعهٔ اعضایی از S که بر ۶ بخش‌پذیرند $\Rightarrow |A| = [\frac{100}{6}] = 16$ (۰/۲۵)

$B =$ مجموعهٔ اعضایی از S که بر ۱۰ بخش‌پذیرند $\Rightarrow |B| = [\frac{100}{10}] = 10$ (۰/۲۵)

$A\cap B =$ مجموعهٔ اعضایی از S که بر ۳۰ بخش پذیرند $\Rightarrow |A\cap B| = [\frac{100}{30}] = 3$ (۰/۲۵)